H.G. Steiner (Hrsg.): Mathematik-Philosophie-Bildung. Köln 1981

Aus: H. Pfeiffer, H.-G. Steiner (Hrsg.): Fragen der Differenzierung im Mathematikunterricht der gymn. Oberstufe. Tagungsbericht. IDM Bielefeld 1982



Lutz Führer

# ANALYSIS ALS PFLICHT? - BEGRONDUNGSVERSUCHE, TRENDS UND NEUANSÄTZE

## Zur Begründung:

Mindestens seit den Richertschen Lehrplänen von 1925 gehört die Analysis zum Pflichtprogramm des Oberstufenunterrichts unserer Gymnasien und vergleichbarer Bildungsanstalten. Es hat für diesen Anspruch zahlreiche Begründungen gegeben, die ich an anderer Stelle zusammengetragen habe[1]. Aus der Vielzahl möglicher Argumente möchte ich hier nur einige herausgreifen, die mir nicht nur als Legitimation ausreichend erscheinen, sondern darüber hinaus Konsequenzen für die Unterrichtsgestaltung nahelegen werden[2].

0. These:
Die Reifeprüfung soll ein Minimum an geistiger Arbeitsfähigkeit und -bereitschaft sicherstellen.

1. These:
Mathematik ist schon da, zumindest *hinter* der gegenwärtigen geistigen und materiellen Umwelt, man kann sie daher nicht "abwählen", sondern allenfalls ignorieren wollen.

2. These:
Analysis ist schwer, und sie ist nur begrenzt trivialisierbar. Wenn aber Autonomie, soziale Kompetenz und kritikbewußte Sozialisation erwünscht sind, dann darf man den künftigen Geistesarbeitern echte Dimensionen wissenschaftlicher Anstrengung und Begrenzung nicht vorenthalten. Es muß folglich da in ein einflußreiches Wissenschaftsgebiet eingeführt werden, wo das mit langem Kenntnisrückgriff möglich erscheint.

3. These:
Gegen Mathematik hilft nur Mathematik. Unsere Abiturienten sollen wissen, daß wissenschaftlicher Erkenntniswille nicht durch eine Mathematisierungsattitüde allein nachweisbar ist. Die Analysis handelt u.a. von der infiniten Verallgemeinerung von Kausalbeziehungen.

---

1) vgl. meinen diesbezüglichen Aufsatz in MU 81/5, S. 81 ff.

2) Ich möchte nicht mißverstanden werden: Die nachfolgenden Oberlegungen sollen keineswegs den Eindruck erwecken, mir sei "das" stichhaltige Begründungssystem bekannt und ich könnte gar daraus einen verbindlichen Aufbau des Analysisunterrichts bis hinein in unterrichtsmethodische Details ableiten. Es geht mir vielmehr darum, *einen* intellektuell redlichen Unterrichtsgang als pädagogisch vertretbar nachzuweisen.

4. These:
Analysis hat mit All- und Existenzaussagen zu tun. Sie soll am emotional unbelasteten "Fremd"objekt präzise Ausdrucksweisen einüben und vor vorschnellen Verallgemeinerungen warnen.

5. These:
Spracherziehung ist viel wichtiger als Verbalbildung. (Differenzierte) Grenzerfahrungen an Denkobjekten sollen (auch) zu Grenzerfahrungen im eigenen Denken führen.

6. These:
Neben Physik und Stochastik soll auch die Analysis vor einem mechanistischen Wunderglauben warnen und sich mit der Reflexion ihrer begrifflichen Grenzen befassen (Unendlichkeitsvorstellungen). Von einem statisch-punktualen Sicherheitsdenken soll allmählich zu einem dynamischeren Begriffssystem gefunden werden, das unseren raumzeitlichen Horizontbegrenzungen angemessener ist (Variablenbegriff; funktionale Zusammenhänge als Gegenstand; Rückschluß von lokalen Daten). Analysis ist folglich in enger Verbindung und als Verschmelzungsprodukt mit dem Mittelstufenstoff zu verstehen - wie es die Meraner Reformer einst forderten.

7. These:
Im Analysisunterricht kann die Dynamik guter Begriffsgestalten erahnt werden, ihre Internationalität, Zeitlosigkeit und Intersubjektivität.

8. These:
Alle Schüler müssen wenigstens bescheidene Kenntnisse und Vorstellungen davon erwerben, wie Analysis als "Organ und Darstellungsform" exakterer Wissenschaften fungiert. Analysis ohne Anwendungen ist folglich leer. Aber auch dabei sind qualitative Aspekte sehr oft wichtiger als kalulierbare[3]. Analysis ohne begriffliche Tiefe ist folglich blind.

9. These:
Für elementare Rechenfertigkeiten als Grundvoraussetzung bei vielen technischen, natur-, wirtschafts- und verwaltungskundlichen Berufen oder Studien ist zu sorgen.

---

3)Ich erinnere hier nur an die Grundbegriffe der Mechanik und Energetik sowie an den ökonomischen Anwendungsbereich (vgl. dazu J. Schwarze: Über die Verwendung von Funktionen einer Veränderlichen in der Wirtschaftstheorie, MNU 1969/6, S. 325-333). Diese Hinweise ließen sich aber durchaus bis zur Stochastik auf der einen Seite und zur Katastrophentheorie auf der anderen ergänzen.



<u>Trends:</u>

Die didaktische Diskussion zum Analysisunterricht hat sich in den letzten Jahrzehnten hauptsächlich mit fachmethodischen Fragen befaßt. Dabei zeichnen sich neuerdings einige Strömungen ab, die geeignet erscheinen, den sich überlagernden organisatorischen Rahmenansprüchen an Integrations- und Differenzierungsmaßnahmen gerecht zu werden.

These 10:
Besonders im Pflichtbereich sind Motivationsfragen sehr ernst zu nehmen. Anwendungsorientierung garantiert hier im allgemeinen keine ausreichende Basis. Die einzige dauerhafte Motivationsgrundlage besteht darin, rasch etwas zu können.

These 11:
Der universitäre Stil eines "Aufbaus von Grund auf" ist für spätere Nichtmathematiker curricular kaum zu rechtfertigen; er fällt mit zu hohen Abstraktionsanforderungen ins Haus; und er scheitert zu oft an der Verbreiterung des Schülermaterials. Auch aus organisatorischen Erwägungen sollte man nicht länger vom Grenzwertbegriff her aufbauen, sondern zu ihm hin.

These 12:
Ein Vorspann in Form eines "Vorsemesters" wirkt frustrierend und zum Teil bildungsfeindlich. Man sollte daher rasch zur Differentialrechnung kommen und die Vorkenntnisdefizite und -inhomogenitäten an verwendungsrelevanten Problemen spiralig aufarbeiten.

These 13:
Anwendungsbeispiele sind möglichst in die Begriffsentwicklung zu integrieren; Vokabelübungen oder logisches Trockentraining sind ungerechtfertigt; das Regelwerk ist Mittel, nicht Ziel der Analysis.

These 14:
Der Variablenbegriff ist intensiv aufzuarbeiten, zumal er in der Mittelstufe zunehmend von konkretisierender Numerik verdrängt wird (Stochastik, Taschenrechner, Algorithmik).

These 15:
Beweise sind dann unterrichtsrelevant, wenn sie inhaltlicher Vertiefung, gestaltlicher Abgrenzung oder sprachlicher Übung dienen. Ihre semantische Funktion ist dabei wichtiger als ihre formalbildende. Ein nützlicher Aspekt dürfte die dialogische Grundtendenz sein, die egozentrischen Evidenzerlebnissen entgegenstehen.

These 16:
Die starke Betonung der Kurvendiskussion ist allenfalls dann zu rechtfertigen, wenn man über die Kalküleinübung hinaus an eine Art von "wissenschaftlichem Miniaturforschungsprojekt" denkt[4]: Eine rezeptmäßige Bearbeitung und punktuelle Betrachtungsschemata sind darum zu vermeiden ("Heuristische Kurvendiskussion").

These 17:
Funktionales Denken darf sich (im Sinne der Meraner Reform) nicht im Zeichnen oder Diskutieren gegebener Funktionen erschöpfen: die heuristisch fruchtbaren Bezüge der Idee "abhängiger/unabhängiger Variabler" dürfte nicht durch einen statischen Funktionsbegriff abgetötet werden. Das Rechnen und später auch das Argumentieren mit Variablen ist einzuüben.

These 18:
Numerische Aspekte sind zu berücksichtigen. Sie dürfen aber nicht zeitlich überwiegen, denn Genauigkeitsfragen erscheinen auf Schulniveau oft aufgesetzt oder exotisch, die Mathematisierungshindernisse wachsen oft proportional zur Echtheit des Problems, finanzielle und organisatorische Probleme überwuchern leicht den Nutzeffekt, und motivationale Nebensächlichkeiten verdecken leicht den Kern der Überlegungen. Keinesfalls darf Computerorientierung in Konsumentenhaltung umschlagen.

These 19:
Argumentation, Konvention und Vermutung sind schrittweise sorgfältiger zu entflechten. Insgesamt sollte auf eine kontinuierliche Steigerung des logischen Anspruchsniveaus geachtet werden. Dabei spielen als inhaltliche Parallelen die Gesichtspunkte "Schluß lokal → global" bzw. "Selbstkommentare" eine wesentliche Mittlerrolle. Allein schon aus dieser Sicht ist ein genetischer Zugang angezeigt.

These 20:
Durch eine behutsame Steigerung des logischen Anspruchsniveaus, der inhaltlichen Begriffsanreicherung und der Informationsdichte in den Formulierungen sollte ein Aufbau vom Besonderen zum Allgemeinen erleichtert werden. Dabei muß auch die

4) vgl. hierzu etwa E. Hunger: Mathematik und Bildung - Eine Einführung in den Sinn der Mathematik zum Gebrauch an der Oberstufe der höheren Schulen ..., Braunschweig 1949, insbesondere S. 63 ff.



Heterogenität der vorgefundenen Lerngruppen zu Maßnahmen der inneren Differenzierung führen (Anspruchsgruppe; Niveau; Darstellungsform; Unterrichtsmittel; Unterrichtsform; inhaltliche Struktur; ...).

These 21:
Die leistungsfähigen Ideen der Analysis besitzen einen relativ hohen Abstraktionsgrad (wenn-dann-Aussagen; indirekte Schlüsse; Grenzwert- und Vollständigkeitsargumente; globalisierende Rückschlüsse beim Ansetzen, Lösen und Interpretieren von Differentialgleichungen). Ist über Kenntnisnahme hinaus Einsicht erwünscht, so sollten Grenzerfahrungen bewußt als Motor der Theorieentwicklung genutzt werden[5], um mit den echten Dimensionen geistiger Anstrengung und den echten Dimensionen der eigenen Möglichkeiten vertraut zu machen (vgl. Thesen 1, 2, 5) und um vor allem rezeptiver Wissenschaftsverehrung entgegenzuwirken (Thesen 3, 6). Atomistischen Zielvorstellungen (Lernziele, Entwicklungspsychologie, Prozeß"ziele") ist ein ganzheitliches *pädagogisches* Konzept entgegenzusetzen, das sich der historischen, sozialen und institutionellen Bedingtheiten auch des Mathematikunterrichts bewußt bleibt[6].

Neuansätze:

Nach der hochschulorientierten Ausgestaltung der Analysis in den späten sechziger und den frühen siebziger Jahren, wurden zuletzt unstrenge Zugänge mit mehr oder weniger starker Anwendungsbetonung propagiert. Die computerorientierten Entwürfe stoßen m.E. vorläufig noch auf zahlreiche materielle Schwierigkeiten, auf Anschaulichkeitsprobleme und Zeitgrenzen. Darüber hinaus besteht wohl die Gefahr einer Ballung von Rechenschwierigkeiten, die durch den kurzfristig garantierten Motivationsgewinn kaum ausgeglichen werden dürfte (sieht man von besonders befähigten und begeisterten Lehrern ab).

5) trotz des unvermeidlichen Zeitaufwandes!

6) Ich betrachte die wissenschaftlichen Didaktiken und Fachdidaktiken als (mitunter) nützliche Hilfsmittel einer (ganzheitlichen und damit - nach landläufigen Auffassungen - unwissenschaftlichen, aber) unerläßlichen Pädagogik im Interesse einer liebevoll-engagierten Belehrung und Erziehung jedes einzelnen Schülers.

Bezüglich der oft empfohlenen "Anwendungsorientierung" gibt es derzeit eine deutliche Ernüchterung: Die von den Extremwertaufgaben geläufigen charakteristischen Hindernisse scheinen nach wie vor gewaltig zu wirken (Realitätsferne aus Gründen der Informationsökonomie; Zeitaufwand; Informationsdichte; Akkumulation von Detailschwierigkeiten; Utilitarismus und einseitige Sicht der Entkenntnisinteressen ...).

Unter den neueren Schulbüchern zeichnen sich die Werke

- Anschauliche Analysis (ANAN) von Barth, Greifenegger u.a. (Ehrenwirth)
- Grundkurs Analysis (GKAN) von van Briel und Neveling (bsv)
- Grundkurs Analysis (Giradet) von Lohse und Wille

sowie

- Einführung in die Analysis (EAN) von Athen, Griesel u.a. (Schroedel)

durch einen raschen und undogmatischen Zugang zum Ableitungskalkül aus. Bei den beiden letztgenannten Büchern wird dies m.E. zu deutlich durch eine begriffliche Ausdünnung erreicht, die die Analysis als Berechnungswerkzeug darstellt und damit u.a. auch den selbstgewählten Anspruch der Anwendungsorientierung entwertet. Um es noch deutlicher zu sagen: Der - wenn auch vorläufige - Verzicht auf Existenzfragen, der vor allem von der Kasseler Schule propagiert wird, läßt sich curricular m.E. nicht rechtfertigen[7]. So bequem solche Vorschläge zunächst für den Alltagsunterricht erscheinen, so wenig lösen sie nach meiner Beobachtung vor Ort Motivations- und Einsichtsprobleme. Im Gegenteil: starke Kalkülzentrierung mit Pseudoanwendungen führt nicht selten sehr rasch zu Disziplinproblemen, die nur durch Notendruck kompensiert werden können, weil weder der Lehrer noch seine Schüler von der erkenntnismäßigen Relevanz der Inhaltsatome überzeugt sind und durchgängige Ideenentwicklungen ganz fehlen.

Die beiden erstgenannten Werke arbeiten dagegen mehr an einer spiraligen Begriffsentwicklung. Dabei betont ANAN sehr stark formalbildende und Kalkülaspekte, während GKAN - wenigstens in der ersten Hälfte - stark anwendungsorientiert

---

7)Das oft genannte Argument, "der" Schüler oder "die" Schüler hätte(n) keine diesbezüglichen Ambitionen, wirkt allzu verräterisch. Es kann doch nicht von Schülern entschieden werden, was Fachleute nicht begründen wollen! ("Der" Schüler geht übrigens am allerliebsten nicht in die Schule ...)



*entwickelt*, nicht nur illustriert. Trotz der deutlichen Schwächen von ANAN in bezug auf Anwendungsbeispiele und Numerik, erscheint mir dieses Buch als zukunftsweisend, weil es mit dem Aufbau "zum Grenzwertbegriff hin" bis hinein in die notwendigen Vorübungen mit Formvariablen und Allaussagen ernst macht (insbesondere Parameterscharen). Die zentrale Idee, den Differenzenquotienten solange wie möglich auszudividieren und dann *zwecks Definition* wirklich $x=x_0$ zu setzen, wird klar herausgearbeitet und auf die Grenzwerttheorie wirklich erst beim Sinus abgehoben.

Wir [8]haben dieses Konzept im abgelaufenen Schuljahr im dreistündigen Unterricht der 11. Klasse weiter ausgebaut, mit Anwendungen durchsetzt und begrifflich intensiviert (vgl. den Überblick auf den nächsten Seiten).

Es zeigte sich, daß das Programm durchaus zu bewältigen war und daß die traditionelle Zeitnot am Ende umso größer war, je mehr Gewicht der betreffende Kollege auf begriffliche Durchdringung gelegt hatte. Nennenswerte Kalküldefizite entstanden dabei jedoch anscheinend nicht, obwohl dies aufgrund der knapperen Zeitanteile für die althergebrachten Rechenübungen zu befürchten war. Die Lerngruppen waren dabei keineswegs stabil, sie waren sogar zum Teil aus vier verschiedenen Klassen bzw. aus der Realschule zusammengestellt worden.
Die Mittelstufendefizite lagen ebenfalls auf dem üblichen, d.h. erschütternden Niveau. .. Die Arbeitseinstellung fast aller Schüler erschien als gegenüber den früheren Vorsemester-Vorkursen erheblich gebessert.

## Zur Lerngruppenintegration und -differenzierung:

Bei der praktischen Realisierung der beschriebenen Detailkonzeption traten auf verschiedenen Ebenen Probleme oder Aspekte auf, die zur Homogenisierung oder Individualisierung der Unterrichtsinhalte und -verfahren drängten. Die Funktion der in Niedersachsen gerade wieder eingeführten 11. Klasse als homogenisierender Puffer vor der Kursstufe bewirkte durch die Reduktion des Mathematikunterrichts *für alle* Schüler auf drei Wochenstunden und durch die Beibehaltung der leistungsheterogenen Klassenstruktur bei organisatorisch bedingter Neuzusammenwürfelung besonders methodische Schwierigkeiten, die durch ein geradezu abenteuerliches offiziöses Papier mit einer überfrachteten Inhaltsvorgabe keineswegs vermindert wurde. Um der Orientierungsfunktion für die im 12. Schuljahr folgende äußerlich

---

8)Ich spreche hier von einigen Kollegen, die das mit mir zusammen an einer Hamelner Schule praktiziert haben.

| Wiederholungen | Theoriekern | Anwendungen | Bemerkungen |
|---|---|---|---|
| 1. Geradenscharen, Pt-Stg-Form | | | Das Thema Geradengleichung wird in scheinbar neuem Kontext wiederholt, der Umgang mit Formvariablen geübt, Schritt 3 vorbereitet |
| 2. Parabeln/qu.Erg. | 3. Tangente mittels verschw. Diskrim. (o.Grenzwert) | 4. Brennpunkte, Fallgesetz, Wurf, Kettenl. | Grenzerfahrungen mit der Mittelstufenmathematik; Ausblick ohne Grenzwertprobleme; Kredit für die Sekantensteigungsidee; Def. u. Erläuterung von Momentangeschw. u. -beschl. |
| 5. Elem. zu ganzrat. Funktionen (evtl. Gauß, Horner) | | 5a. Inter- und Extrapolation | Vorbereitung der "heuristischen Kurvendisk."; Polynomdivision; geometr. Reihe nebenbei |
| | 6. Fehlversuch bei der Wendeparabel | | Grenzerfahrungen als Motor der Begriffentw. |
| | | 7. Parabeltangente mittels konj. Durchmesser | Zeitlosigkeit |
| | 8. Sinnvolle Tangentensteigerungsdefinition nach Ausdividieren der Sekantensteig. (Bezüge zu 4. u. 7.) | | behutsame Begriffsausschärfung und Abstraktion |
| (9.) Stückw. def. Fkt., Wurzelfkt., gebr.-rat. ... | | | |
| | 10. Problematisierung von $\frac{0}{0}$ (Marx, Berkeley) (Gegenbeispiele zum Ausdividieren) | | eine Definition kann nicht richtig oder wahr sein, aber angemessen .../der Tangentenbegriff bleibt noch unfertig .. |
| | | 11. Newton-Näherung<br>12. Kurvendisk.<br>13. Rekonstr'aufg.<br>14. "Ernste"Anw.'-beisp. | Arbeitsteilung mit Niveaudifferenzierung |

Forts. nächste Seite

Forts.

| Wiederholungen | Theoriekern | Anwendungen | Bemerkungen |
|---|---|---|---|
| | 15. Heuristik zum Regelwerk und zum Trennungssatz / Schattierungen des Tangentenbegriffs | | gute Definitionen krönen gute Begriffe; man erkennt sie daran, daß sie viel mehr leisten als man zunächst hineinlegte und erwartete... (gute Begriffe werden nicht von Schülern gefunden!) |
| | 16. Quantifikation von $f(x) \approx t_f(x)$ "nahe $x_0$" | | Ausblick auf die weitere Entfaltung im späteren Leistungskurs; die $\varepsilon$-$\delta$-Idee wird hier nur als "je...desto"-Beziehung pointiert, um Punkt 18 vorzubereiten |
| 17. $\binom{\cos t}{\sin t}$ am Einheitskreis (evtl. $\pi$-Ber.m.Diff'qu. | 18. Ableitung von Sinus u. Kosinus (Kreisbewegung) | 19. Schwingungsgleichung/evtl. Verkettungen | Idee des Rückschlusses aus der einfachen Rückstellbedingung (Saisoneffekte ...) |
| 20. Wied. EXP.-u.Log.'-fkt. | 21. Abl'versuch | 22. Wachstumsgl. | Oberblick über die Theorie(schwächen), Ausbl. |

differenzierte Kursstufe gerecht zu werden, kamen Zwischenkommentaren zu typischen Gedankenabläufen bei der gerade entwickelten Mathematik und zum erwarteten Anspruchsniveau der Folgekurse im Grund- bzw. Leistungskursbereich besondere Bedeutung zu, obwohl hier bezüglich der Verhaltensweisen der einzelnen Kollegen nur recht wild spekuliert werden konnte.

Es folgen einige Bemerkungen zu den auf den beiden vorherigen Seiten dargelegten Kapiteln:

1./2. Hier zeigten sich erwartungsgemäß in breiter Front erhebliche Defizite bzw. Unsicherheiten im Umgang mit Formvariablen, Namensänderungen und algebraisch-geometrischen Wechselbezügen. Durch die allen Schülern ungewohnte Verpackung in Betrachtungen über Geraden- oder Parabelscharen waren alle neu gefordert, z.T. irritiert, aber auch von ihrer Chance zum Neubeginn überzeugt, so daß recht intensiv an den entsprechenden Techniken gearbeitet werden konnte.

3.-9. Nach der erfolgreichen (breiten!) Vorarbeit unter Punkt 1 wurden diese Punkte weitgehend informativ erarbeitet und eingeübt. Dabei wurde das meiste als Pflichtstoff für alle Schüler angesehen; lediglich eingestreute historische Bemerkungen (4, 7), delikatere Anwendungsbeispiele (5a, 5, 9) sowie Aus- und Oberblicke boten wahlfreie Zusatzinformationen.

10. Die Problematisierung von "$\frac{0}{0}$" wurde sehr behutsam erarbeitet und mit entlastenden Kommentaren versehen. Es zeigte sich, daß dieses Thema (neben Punkt 16) am anspruchsvollsten wirkte, da die klare Unterscheidung von Begriff, Phänomen und Definition im Mittelstufenunterricht nicht ernsthaft vorbereitet wurde (Geometrie? Wahrscheinlichkeit?). Etwa die Hälfte meiner Schüler wurde durch die Erörterung (glücklicherweise vorübergehend) verwirrt, während die andere Hälfte außerordentlich interessiert und angeregt weiterdachte. Zur ersten Hälfte gehörten nach meiner Beobachtung neben einigen unaufmerksamen oder leistungsschwachen Schülern vor allem sog. "Fleißarbeiter", deren Stärke in der zuverlässigen Reproduktion oder Reorganisation liegt[9], während sich in der zweiten Hälfte neben zuverlässigen Spitzen auch "leistungsschwache", aber fantasievollere Schüler hervortaten, die durch den unerwarteten Grundsatzcharakter der aufgeworfenen Fragen angezogen wurden.

11.-14. Nach der frontalen Behandlung des Newton-Verfahrens sollte der unvermeidlichen Frage nachgegangen werden, wozu "man" derartig überzüchtete Genauigkeiten braucht. Da die Ableitung vorerst nicht mittels des Regelwerks errechnet wurde[10], sondern durch die relativ mühselige Kürzung des Differenzenquotienten, bestand eine sehr erwünschte Neigung, große Teile der verlangten Kurvendiskussionen arbeitsteilig (Newton-Verfahren für Nullstellen und Extremwerte) und möglichst ohne Differentialrechnung zu bewerkstelligen, so daß zugleich in die "heuristische Kurvendiskussion" eingeführt wurde und die Frage nach der Notwendigkeit des Ableitungseinsatzes pointiert. Es zeigte sich, daß dieses Vorgehen außerordentlich

9) denen also die gegenwärtigen Normenbücher auf den Leib geschneidert sind!

10) Nur die Summen- und Konstantenregel wurden stillschweigend genutzt.



rasch in leistungsdifferenzierter Gruppenarbeit in die Techniken der (heuristischen) Kurvendiskussion einführte (alle Schüler lernten das in ca. 5 Stunden) und daß große Bereitschaft bestand, in denselben Gruppen an wirklich relevanten Anwendungsbeispielen zu arbeiten. Dabei wurde literaturgestützt über Biegelinien, das Fermatsche Prinzip, Kostenoptimierung, Eintauchtiefen und Verkehrsflußoptimierung gearbeitet und referiert (Folien/Umdrucke/Referate).

15. Punkt 15 wurde mit der Frage nach Assoziationen zum "Begriff" Tangente eingeleitet. Von Schülerseite - und auch hier mit der unter 10. beschriebenen Aufspaltung - wurden nacheinander der Schmieggeradenaspekt, der Stützgeradenaspekt, die Charakterisierung durch Steigerungswerte, das Passen zu den Sekanten bzw. zu deren Steigungen und die Bedeutung als Trendsignal (Grenzkosten, Momentangeschwindigkeit, Trägheitssatz, ...) genannt, so daß sich hier bereits ein weites Assoziationsspektrum zeigte, das die relativ aufwendige Begriffsentwicklung lohnte.

16. Die Quantifikation des Schmieggeradenaspekts wurde nur an quadratischen Abschätzungen durchgerechnet und nicht verallgemeinert. Das Thema wurde ausdrücklich späteren Leistungskurslern gewidmet, während die weniger sicheren Schüler die Quantifikation des "je näher, desto besser" zur Kenntnis nehmen sollten. (Die diesbezügliche Leistungskontrolle wurde ausdrücklich über dem 10-Punkte-Niveau angesiedelt.)

17.-22. Die Herleitungen wurden angeboten, die Ergebnisse betont.

Gewisse Schwierigkeiten bestehen wie erwähnt bezüglich der inhaltlichen Charakterisierung der anschließenden Grund- und Leistungskurse. Vollrath's Vorschlag[11], einerseits mehr anwendungs-, andererseits mehr theoriezentriert zu arbeiten, kann m.E. aus den schon erwähnten Hinderungsgründen und Zielvorstellungen nicht voll ausreichen. Als Arbeitshypothese möchte ich vorschlagen, den Grundkurs mehr informativ und produktorientiert, den Leistungskurs dagegen stärker prozeßorientiert und assoziationsreicher auszugestalten. Einige Gliederungspunkte enthält der folgende Vorschlag:

11) vgl. MNU 30 (1977), 5 ff. und MU 1976/5,7 ff.

| Grundkurs | gemeinsam | Leistungskurs |
|---|---|---|
| | | einfache Differentialgleichungen u. Verkettung; Umkehrfunktionen |
| | geometrische Reihe (Zinseszins) und Parabelquadratur nach Archimedes | |
| $x^3$-Integration nach Archimedes | | $x^r$-Integration nach Fermat |
| einfache Rotationskörper und Momente; | Arbeitsintegral; Def. des (Regelfunktions-) Integral | Querschnittsfunktionen aufstellen u. integrieren; Berechnung spezieller Integrale (arc tan; log...) durch Näherungsverf. |
| | Simpson-Regel | Analyse des Geltungsbereichs (Linearität des Integrals) |
| näherungsweise Ber. von $\int e^{-\frac{1}{2}t^2}\,dt$ (Ausblick auf Verteilungsfunktionen) | | Grenzwerttheorie (ε-δ oder auch Folgen) und Schranken- oder Mittelwertsatz mit Anwendungen (Fehlerrechn., Schmiegkurven) |
| Plausibilitätsbetr. für stückw. monotone und stetige Fkt. | Hauptsatz | Beweis Rückblick: Ableitungen von e-Funktion und Logar. |
| ..... | | ..... |